第６講　三角関数の合成（基本編）

6　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta)=3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(2)　$f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．また，最大値を与える θ を θ_1 とするとき，$\tan 2\theta_1$ の値を求めよ．

(3)　$f(\theta)=\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+3\cos^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(4)　$f(\theta)=\sin^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+4\cos^2\theta-\sin\theta-2\cos\theta+1$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

＜ Note ＞

第６講　三角関数の合成（基本編）

6　$0 \leqq x < 2\pi$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$f(x)=2+\sin 2x-\sin x-\cos x$ とする．このとき $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2)　$g(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+5\cos^2 x$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　最大値 1，最小値 $\dfrac{3}{4}$　　㋑　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $\dfrac{3}{4}$

㋒　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $3-\sqrt{2}$

(2)　㋐　最大値 $3+\sqrt{5}$，最小値 $3-\sqrt{5}$　　㋑　最大値 5，最小値 2

㋒　最大値 $3+\sqrt{3}$，最小値 $3-\sqrt{3}$

＜ Note ＞

第６講　三角関数の合成（基本編）

6　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta)=3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(2)　$f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．また，最大値を与える θ を θ_1 とするとき，$\tan 2\theta_1$ の値を求めよ．

(3)　$f(\theta)=\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+3\cos^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

(4)　$f(\theta)=\sin^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+4\cos^2\theta-\sin\theta-2\cos\theta+1$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．

【答】 (1) 最大値 $2\sqrt{3}$，最小値 $\sqrt{3}$　(2) 最大値 5，最小値 3，$\tan 2\theta_1=\dfrac{24}{7}$

(3) 最大値 $2+\sqrt{2}$，最小値 1　(4) 最大値 $6-\sqrt{5}$，最小値 1

【解答】

(1)　$f(\theta)=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であり，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より，

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\mathbf{2\sqrt{3}}$ をとり

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ すなわち $\theta=0$ のとき最小値 $\mathbf{\sqrt{3}}$ をとる．

(2)　$f(\theta)=5\sin(\theta+\alpha)$　（ただし，α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ を満たす実数）

であり，$\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}+\alpha$ より，

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき最大値 **5** をとり

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 **3** をとる．

また，$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ より

$$\tan 2\theta_1=\tan(\pi-2\alpha)=\frac{\tan\pi-\tan 2\alpha}{1+\tan\pi\tan 2\alpha}=-\tan 2\alpha$$

$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ より $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\dfrac{4}{3}}{1-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=-\dfrac{24}{7}$ であるから

$$\boldsymbol{\tan 2\theta_1=\frac{24}{7}}$$

(3)　$f(\theta)=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+2\times\dfrac{\sin 2\theta}{2}+3\times\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2$

$=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

であり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より，

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき最大値 $\mathbf{2+\sqrt{2}}$ をとり

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{1}$ をとる．

(4)　$f(\theta)=(\sin\theta+2\cos\theta)^2-(\sin\theta+2\cos\theta)+1$ である．

ここで $t=\sin\theta+2\cos\theta$ とおくと

$t=\sqrt{5}\sin(\theta+\beta)$　（ただし，β は $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\beta=2$ を満たす実数）

であり，$\beta\leqq\theta+\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}+\beta$ より，

$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ のとき t は最大値 $\sqrt{5}$ をとり

$\theta+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\beta$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき t は最小値 1 をとる．

よって，$1\leqq t\leqq\sqrt{5}$ である．

このとき $f(\theta)=t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるので，

$t=\sqrt{5}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$ のとき最大値 $\mathbf{6-\sqrt{5}}$ をとり

$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{1}$ をとる．

第６講　三角関数の合成（基本編）

> **6**　$0 \leqq x < 2\pi$ とするとき，次の各問いに答えよ．
>
> (1)　$f(x) = 2 + \sin 2x - \sin x - \cos x$ とする．このとき $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．
>
> (2)　$g(x) = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 5\cos^2 x$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ．
>
> **【選択肢】**
>
> (1)　㋐　最大値 1，最小値 $\dfrac{3}{4}$　　㋑　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $\dfrac{3}{4}$
>
> 　　㋒　最大値 $3+\sqrt{2}$，最小値 $3-\sqrt{2}$
>
> (2)　㋐　最大値 $3+\sqrt{5}$，最小値 $3-\sqrt{5}$　　㋑　最大値 5，最小値 2
>
> 　　㋒　最大値 $3+\sqrt{3}$，最小値 $3-\sqrt{3}$

【答】 (1) ㋑　(2) ㋐

【解答】

(1)　$\sin x + \cos x = t$ とおくと $t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ で，$\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ であるので

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ となる．

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

より

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + \sin 2x) - (\sin x + \cos x) + 1 \\ &= t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって，$t = -\sqrt{2}$ のとき最大値 $(-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{2}) + 1 = \mathbf{3+\sqrt{2}}$，

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{\dfrac{3}{4}}$ をとる．

(2)　$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$，$\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$，$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ より

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1-\cos 2x}{2} + 2 \times \frac{\sin 2x}{2} + 5 \times \frac{1+\cos 2x}{2} \\ &= \sin 2x + 2\cos 2x + 3 \\ &= \sqrt{5}\sin(2x + \alpha) + 3 \end{aligned}$$

（ただし，α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan\alpha = 2$ を満たす実数）

ここで，$\alpha \leqq 2x + \alpha < 4\pi + \alpha$ であるので，

$2x + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{2}\pi$ すなわち $x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{5}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ のとき最大値 $\mathbf{3+\sqrt{5}}$ をとり

$2x + \alpha = \dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{2}\pi$ すなわち $x = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{7}{4}\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ のとき最小値 $\mathbf{3-\sqrt{5}}$ をとる．